

數學科評量題型的複雜性規範

— 以美國 NAEP 數學規準 2005 為例

柯俊良

國立台中師範學院教育測驗統計研究所

第一節 前言

在測驗之中，除了包含了教學目標——也就是課程的內容外，不可避免的，出題者也會就測驗題型或內容加以變化，以增加區分受試者能力的可能性。陳英豪、吳裕益 (民 80) 表示在認知領域中智育的學習結果可分為知識以及心智的能力與技巧兩大類，其中心智能力與技巧又可細分為理解、應用、分析、綜合、評鑑等。但李坤崇 (民 89) 也指出多數教師實施教學評量時，較強調低層次的記憶評量，而忽略較高層次思考的評量。

尤其對數學科學習成就測驗來說，在知識層面之外，如何測量學生應用各種概念解題的技能，或測量學生所能解題的不同層次，是非常重要的 (鄭富森, 民 86)。針對這個問題，美國「國家評量指導委員會」(National assessment governing board, 簡稱 NAGB) 所公佈之 Mathematics framework for 2005 national assessment of education progress pre-publication edition(NAGB, 2001) 中對於相同課程內容與能力規準，其題型的複雜性如何定義曾加以說明。以下將對 NAGB 之試題複雜性加以簡單介紹。

第二節 數學科試題複雜性

在美國國會與美國教育部教育統計中心的授權、監督之下，NAGB 負責規劃「國家教育進展評量」(National assessment of educational progress, 簡稱 NAEP) 的所有政策，並在全美國四、八及十二年級舉行定期的評量 (鄭富森, 民 87)。其評量的試題都

是爲了能測得一個能與某種數學內容產生聯繫的目標，如幾何學或數的概念。這些試題也要求受試學生去思考，這些對學生思考上的要求，就會構成數學試題的複雜性。這些試題的要求有一些目的，就是想得知受試學生從他們努力解決的這一項常見的數學任務中，能回憶起多少、了解多少、能否加以推理與實際解題。如果受試者沒有學習到與此題相關的數學能力，那這項解題的任務對他來說可就是不同以往且是沉重的要求，這個學生可能是沒辦法成功的解開題目了。這些題目都是由管理者從具有代表性的課程之中，挑選出相對應其年級能力的題目來做爲試題，但題目的複雜性常常不受學生所熟練特定課程的支配。

Mathematics framework for 2005 中將題目複雜性分成了低度、中度與高度複雜性這三個等級。低度複雜性的題目或許會要求學生回憶所學過某個數學的特性，中度複雜性則可能會要學生將兩種數學特性產生聯結，高度複雜性有可能要學生去分析一個數學模式的假設。

這些題目複雜性的量尺，有些類似但又不同於 NAEP 以前在 1996 到 2000 數學測驗規準所提出之數學能力的等級，它較像是企圖想找出並界定當學生做題目時會產生的思考類型。儘管在哪一個內容範圍它都不像是用來作爲定義試題特性的百分比，比較像是可以描述每個試題含意的象徵，與可以在每個年級能力水準的管理上達到平衡的作用，可知複雜性等級與數學能力的等級是不同的。然而，有鑑於數學能力取決於學生對試題中有關技術、知識和背景的推理，所以對於數學試題的期待是可以在複雜性上被描述出來的。

數學試題的複雜性不直接與測驗的題型（如選擇題、簡答題、申論題）有關。需要學生產生反應的試題，會比學生單純的從二選一的選擇題中選出一個選項還要再有些不容易回答。任何試題的形式都可以針對不同深度和技巧的數學領域來出題，選擇題可用來評價複雜的數學，簡答題針對日常生活的數學點子來出題也可以出得很好。除此之外，對於已經出好題目的數學試題來說，其試題的複雜性是不會改變的，它也不太需要藉由某些特性或反應的水準所提供的分數來作爲依據。

第三節 數學複雜性的等級內容

一、低度複雜性

這個類別非常需要學生去記憶與辨別先前學習過的觀念與原理原則。此種試題的典型例子是會具體指示出學生需要做到什麼，它常常是要學生去完成有關機械式操作

的程序, 不會提供給學生原本的數學方法和解決之道。適於低度複雜性的出題類型舉例如下所示:

- (一) 記憶或辨別一個事實、專有名詞或特性。
- (二) 能理解一個觀念的例子。
- (三) 計算出和、差、積或商。
- (四) 能了解相等的代表式子。
- (五) 完成一個具體說明的過程。
- (六) 能計算出一個已知變數的算式或方程式。
- (七) 能解決只有一個步驟的文字問題。
- (八) 畫出或計算出簡單的幾何圖形。
- (九) 能從繪圖、表格或圖形中得到訊息。

二、中度複雜性

中度複雜性的試題種類比起低度複雜性來說, 包含了更多思考上的彈性與選擇性, 它們通常需要一個慣用的、不是具體說明的、不只一個步驟的回答。學生們被期望去決定該做什麼, 使用推理與問題解決等非正式的方法, 以得到各領域解題的技能與知識。以下將說明適於中度複雜性的出題類型:

- (一) 能以一種以上的方式描述數學的狀況。
- (二) 依照情況與目的, 選擇和使用不同的表現方法。
- (三) 解決需要多個步驟的應用問題。
- (四) 比較圖形或陳述。
- (五) 在一個解題過程中提供步驟的解釋。
- (六) 能說明視覺性的表現方法。
- (七) 能延伸數學模式。

- (八) 能從繪圖、表格或圖形中得到訊息，並利用它們來解決需要多重步驟的問題。
- (九) 用公式表現一個常見的問題、給予的資料與狀況。
- (十) 能說明簡單的討論主題。

三、高度複雜性

高度複雜性的問題會加諸沉重的要求在學生上，這些學生必須致力於更多抽象的推理、計畫、分析、判斷與富創造力的思考。對於這類試題而言，令人滿意的回答是需要透過一個抽象和精熟的方法才能得到。在這個等級的試題或許會問學生下列的例子：

- (一) 描述如何針對不同的數學狀況，以不同的表現方法呈現。
- (二) 能展現一個具有多重步驟與結論的過程。
- (三) 分析過程與觀念之間的相似點與不同點。
- (四) 能歸納數學模式。
- (五) 用公式表現一個常見的問題、給予的資料與狀況。
- (六) 能解決新穎的問題。
- (七) 用一個以上的方法解決問題。
- (八) 對問題能解釋和證明其解法。
- (九) 能描述、比較和對照解題的方法。
- (十) 對一個複雜的狀況的數學模式能用公式表示。
- (十一) 分析在一個數學模式中構成的假設。
- (十二) 分析或產生一個推論式的討論主題。
- (十三) 提供數學上的理由。

四、數學複雜性的平衡

2005 年 NAEP 所尋找的理想平衡，並不盡然如同人們所期望的是在數學教育課程或教學方面的平衡，這裡所指的平衡必須在 NAEP 所約束的測驗情境中考慮。這些

約束包括它紙筆測驗的形式與測驗時間的特性,舉例來說,高度複雜性的試題需要較多的時間來完成。同時,這三種類型的測驗對於測量學生數學成就的全部範圍來說是不可缺少的。在這環境條件內,理想的平衡是測驗總分中有一半的試題是以適度複雜性試題所組成,其他的分數則由低度及高度複雜性的試題所平分。在四年級、八年級與十二年級所進行的測驗將遵照這個平衡來做。

第四節 各複雜度試題之範例

一、低度複雜度例題

- 記憶或辨別一個事實、專有名詞或特性。

下列哪一個不是正方形的特性?

- a) 對邊是平行的。
- b) 每個邊的長度相等。
- c) 內角和為 180 度。
- d) 對角線長度都相等。
- e) 每個角量起來都是相等的。

- 計算出和、差、積或商。

有 30 個蛋糕,其中的 $\frac{3}{5}$ 是多少個蛋糕?

- a) 15 個
- b) 18 個
- c) 20 個
- d) 24 個

- 完成一個具體說明的過程。

200 分鐘等於多少小時?

a) $2\frac{1}{2}$

b) $3\frac{1}{4}$

c) $3\frac{1}{3}$

d) $3\frac{1}{2}$

e) $3\frac{5}{6}$

- 能從繪圖、表格或圖形中得到訊息。



從刻度上顯示的重量是多少？

a) 101 公克

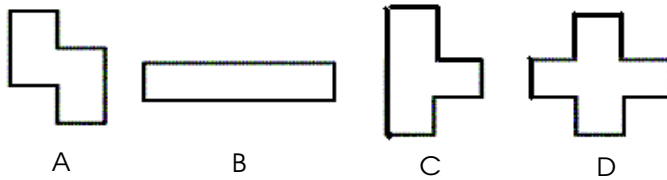
b) 110 公克

c) 120 公克

d) 150 公克

二、中度複雜度例題

- 比較圖形或陳述。



哪一個圖形的面積最大？

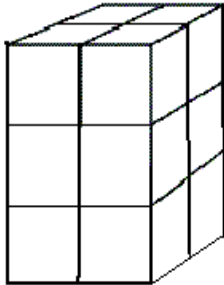
a) A

b) B

c) C

d) D

- 能說明視覺性的表現方法。



在圖形中，這個大的長方體是由多少個小正方體所組成？

a) 7

b) 8

c) 12

d) 24

- 能說明簡單的討論主題。

小英說：「我把 8 乘以任何整數之後，得到的答案會小於 8。」

小明說：「不是的。8 乘以任何整數後通常答案不是等於 8 就是大於 8。」

誰說的才對？在答案中寫下你的理由。

三、高度複雜度例題

- 分析或產生一個推論式的討論主題。

小華知道甲、乙、丙三個點有下列的事實：

第一點：甲、乙、丙都在同一條線上，但不一定按照次序。

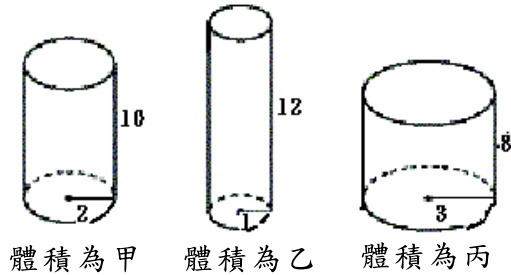
第二點：丙到甲的長度是丙到乙的兩倍長。

小華推斷出丙這一點總會是在甲和乙之間，小華的推斷正確嗎？

() 正確 () 不正確

除此之外, 請用圖示來解釋你的答案。

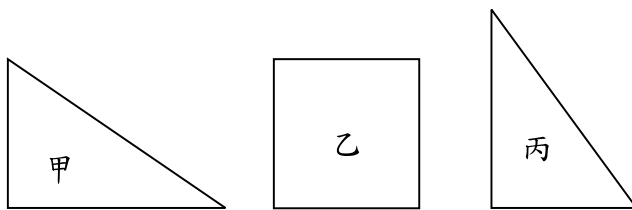
- 分析或產生一個推論式的討論主題。



每個圓柱的半徑和高如上圖所示。如果甲、乙、丙分別代表這三個圓柱的體積, 以下的敘述何者正確?

- a) 甲 = 乙 = 丙
- b) 丙 < 乙 < 甲
- c) 丙 < 甲 < 乙
- d) 甲 < 丙 < 乙
- e) 乙 < 甲 < 丙

- 提供數學上的理由。



在柯老師的班級中, 學生投票選出他們最喜歡的形狀, 下表是投票結果:

	A 班	B 班	C 班
甲	9	12	10
乙	3	10	16
丙	20	8	4

使用上表得到的資料, 柯老師要選出他們最喜歡的形狀, 柯老師會選出哪一個呢?
爲什麼?

柯老師會選: _____

我的解釋是:

參考文獻

一、中文部分

陳英豪、吳裕益 (民 80): 測驗與評量。台北: 復文。

李坤崇 (民 89): 多元化教學評量。台北: 心理。

鄭富森 (民 86): 第三次定期評量試題分析報告。測驗統計簡訊, 18 期, 1-28。

鄭富森 (民 87): 淺談國中基本學力測驗之評鑑原則。測驗與輔導, 150 期, 3119-3125。

二、英文部分

National Assessment Governing Board (2001). *Mathematics framework for the 2005 National Assessment of Education Progress pre-publication edition*. Washington, DC: National Assessment Governing Board. Retrieved March 15, 2003, from <http://www.nagb.org/pubs/2005framework.doc>